2026학년도 5월 고3 전국연합학력평가

정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

1	④	**2**	⑤	**3**	③	**4**	⑤	**5**	①
6	①	**7**	⑤	**8**	③	**9**	①	**10**	②
11	④	**12**	②	**13**	②	**14**	③	**15**	⑤
16	24	**17**	140	**18**	8	**19**	10	**20**	155
21	55	**22**	9						

1. [출제의도] 지수법칙 계산하기

$2^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{32} = 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{5}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}} = 4$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$y' = 3x^2+2$이므로

곡선 $y=x^3+2x-1$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의

접선의 기울기는 $3\times1^2+2=5$

3. [출제의도] 부정적분 이해하기

함수 $f(x)$는 $\dfrac{d}{dx}f(x)$의 한 부정적분이고

$\displaystyle\int \frac{d}{dx}f(x)dx = \int(3x^2-5)dx = x^3-5x+C$

(C는 적분상수)

이므로 $f(x)=x^3-5x+c$ (c는 상수)

$f(0)=1$에서 $c=1$

따라서 $f(x)=x^3-5x+1$이므로 $f(1)=-3$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\displaystyle\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=3+2=5$

5. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프 이해하기

곡선 $y=2^{x-a}+b$의 점근선이 직선 $y=-4$이므로

$b=-4$

곡선 $y=2^{x-a}-4$가 원점을 지나므로

$2^{-a}-4=0$에서 $a=-2$

따라서 $a+b=-6$

6. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값이 각각

$a+1$, $-a+1$이므로

$(a+1)-(-a+1)=2a=6$에서 $a=3$

함수 $f(x)$의 주기가 $\dfrac{2\pi}{b}$이므로

$\dfrac{2\pi}{b}=3\pi$에서 $b=\dfrac{2}{3}$

따라서 $a+b=\dfrac{11}{3}$

7. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$\displaystyle\int_a^x f(t)dt=x^2-3ax+2$의 양변을

x에 대하여 미분하면 $f(x)=2x-3a$

$f(0)=-3a>0$에서 $a<0$

$\displaystyle\int_a^x f(t)dt=x^2-3ax+2$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=a^2-3a^2+2$에서 $a^2=1$

$a=-1$이므로 $f(x)=2x+3$

따라서 $f(2)=7$

8. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제해결하기

a_3이 a_1과 a_5의 등비중항이므로 $a_3^2=36$

수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r\neq0)$이라 하면

$a_3=a_1r^2<0$이므로 $a_3=-6$

$a_3+2a_4=a_3+2a_3r=-6-12r$

$a_3+2a_4=2$이므로 $r=-\dfrac{2}{3}$

$a_3=a_2r$에서 $-6=a_2\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)$

따라서 $a_2=(-6)\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=9$

9. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-4}{h}=9$이고 $\displaystyle\lim_{h\to0}h=0$이므로

$\displaystyle\lim_{h\to0}(g(1+h)-4)=0$

함수 $g(x)=(x^2+x)f(x)$가 다항함수이므로

$\displaystyle\lim_{h\to0}(g(1+h)-4)=g(1)-4=0$에서

$g(1)=2f(1)=4$, $f(1)=2$

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-4}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=g'(1)$이므로

$g'(1)=9$

또한 $g'(x)=(2x+1)f(x)+(x^2+x)f'(x)$에서

$g'(1)=3f(1)+2f'(1)=6+2f'(1)$이므로

$f'(1)=\dfrac{3}{2}$

따라서 $f(1)\times f'(1)=2\times\dfrac{3}{2}=3$

10. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

삼각형 ABC의 넓이가 24이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A=\dfrac{1}{2}\times4\times15\times\sin A=24$

에서 $\sin A=\dfrac{4}{5}$

각 A가 예각이므로 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\dfrac{3}{5}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A$

$=4^2+15^2-2\times4\times15\times\dfrac{3}{5}=169$

에서 $\overline{BC}=13$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$2R=\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{13}{\frac{4}{5}}=\dfrac{65}{4}$

따라서 $R=\dfrac{65}{8}$

11. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

조건 (가)를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

(ⅰ) $a_1<0$일 때

$a_2=-2a_1>0$이므로 $a_3=a_2-3=-2a_1-3$

조건 (나)에 의하여 $-2a_1-3=a_1+4$

$a_1=-\dfrac{7}{3}$

(ⅱ) $a_1\geq0$일 때

$a_2=a_1-3$

(a) $a_2\geq0$일 때

$a_3=a_2-3=a_1-6$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(b) $a_2<0$일 때

$a_2=a_1-3<0$이므로 $a_1<3$

$a_3=-2a_2=-2(a_1-3)$

조건 (나)에 의하여 $-2(a_1-3)=a_1+4$

$a_1=\dfrac{2}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 조건을 만족시키는

모든 수열 $\{a_n\}$의 a_1의 값의 합은 $\left(-\dfrac{7}{3}\right)+\dfrac{2}{3}=-\dfrac{5}{3}$

12. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

ㄱ. $v(t)=3t^2-11t+8=(3t-8)(t-1)=0$에서

$t=1$ 또는 $t=\dfrac{8}{3}$

$0\leq t<1$에서 $v(t)>0$,

$1<t<\dfrac{8}{3}$에서 $v(t)<0$이므로

시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

(참)

ㄴ. 시각 t에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=\dfrac{d}{dt}v(t)=6t-11$

$a(t)=1$에서 $t=2$

그러므로 점 P의 가속도가 1이 되는 순간의 시각 t는 2이다.

시각 $t=0$일 때 원점을 출발하므로

점 P의 가속도가 1인 순간 점 P의 위치는

$\displaystyle 0+\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2(3t^2-11t+8)dt$

$=\left[t^3-\dfrac{11}{2}t^2+8t\right]_0^2$

$=2-0=2$ (참)

ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$\displaystyle\int_0^2|v(t)|dt$

$\displaystyle=\int_0^2|3t^2-11t+8|dt$

$\displaystyle=\int_0^1(3t^2-11t+8)dt+\int_1^2(-3t^2+11t-8)dt$

$=\left[t^3-\dfrac{11}{2}t^2+8t\right]_0^1+\left[-t^3+\dfrac{11}{2}t^2-8t\right]_1^2$

$=\left(\dfrac{7}{2}-0\right)+\left\{-2-\left(-\dfrac{7}{2}\right)\right\}=5$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

13. [출제의도] 평균변화율을 활용하여 문제해결하기

조건 (가)에서

$0<x\leq12$일 때 $f(x)=\dfrac{ax}{\sqrt{2x+1}-1}$ … ㉠

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\displaystyle f(0)=\lim_{x\to0+}\frac{ax(\sqrt{2x+1}+1)}{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0+}\frac{ax(\sqrt{2x+1}+1)}{2x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0+}\frac{a(\sqrt{2x+1}+1)}{2}=a$

㉠에 의하여 $f(12)=\dfrac{12a}{\sqrt{2\times12+1}-1}=3a$

조건 (나)에서 모든 실수 k에 대하여

$\dfrac{f(k+12)-f(k)}{(k+12)-k}=\dfrac{1}{2}$

$f(k+12)=f(k)+6$ … ㉡

㉡의 양변에 $k=0$을 대입하면

$f(12)=f(0)+6$, $3a=a+6$에서 $a=3$

㉠에 의하여 $f(4)=\dfrac{12}{\sqrt{2\times4+1}-1}=6$

따라서 ㉡에 의하여

$f(28)=f(16)+6=(f(4)+6)+6=18$

14. [출제의도] 삼각함수의 성질을 활용하여 문제해결하기

점 A의 x좌표를 $a\left(0<a<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하자.

곡선 $y=\sin x$가 직선 $x=\dfrac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

점 B의 x좌표는 $\pi-a$

$\sin a=k$에서

$-\sqrt{1-k^2}=-\sqrt{1-\sin^2 a}=-\cos a$이고

$\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi\pm a\right)=-\cos a$이며,

곡선 $y=\sin x\,(0\le x\le 2\pi)$와

직선 $y=-\sqrt{1-k^2}$의 교점은 C, D뿐이므로

두 점 C, D의 x좌표는 각각 $\dfrac{3}{2}\pi-a$, $\dfrac{3}{2}\pi+a$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=(\pi-a)-a=\pi-2a$

$\overline{\mathrm{CD}}=\left(\dfrac{3}{2}\pi+a\right)-\left(\dfrac{3}{2}\pi-a\right)=2a$

$\overline{\mathrm{CD}}-\overline{\mathrm{AB}}=2a-(\pi-2a)=4a-\pi=\dfrac{2}{9}\pi$에서

$a=\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{2}{9}\pi+\pi\right)=\dfrac{11}{36}\pi$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\pi-2\times\dfrac{11}{36}\pi=\dfrac{7}{18}\pi$

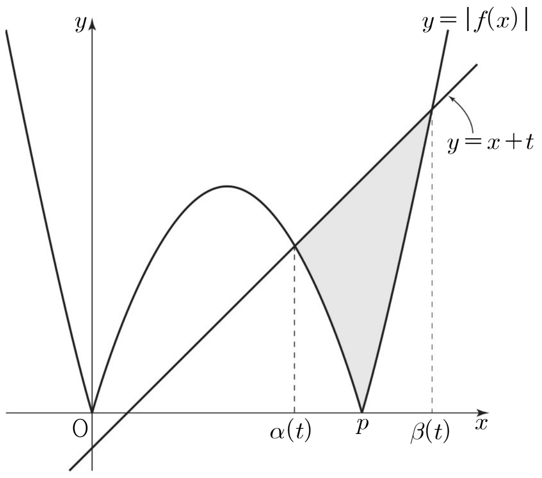
15. [출제의도] 정적분 이해하기

함수 $y=-f(x)$의 그래프에 접하는 직선 중 기울기가 1인 직선의 y절편을 t_1이라 하자.

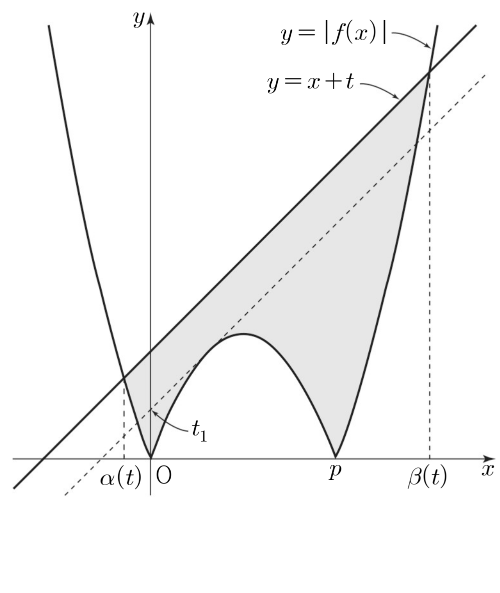
$-p<t<0$ 또는 $t\ge t_1$일 때

[그림 1], [그림 2]와 같이 $\alpha(t)\le x\le\beta(t)$인 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|\le x+t$이므로

$g(t)=\displaystyle\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\{|f(x)|-(x+t)\}dx\le 0$



[그림 1]



[그림 2]

그러므로 함수 $g(t)$는 $0\le t<t_1$에서 최댓값 $\dfrac{1}{2}$을 갖는다.

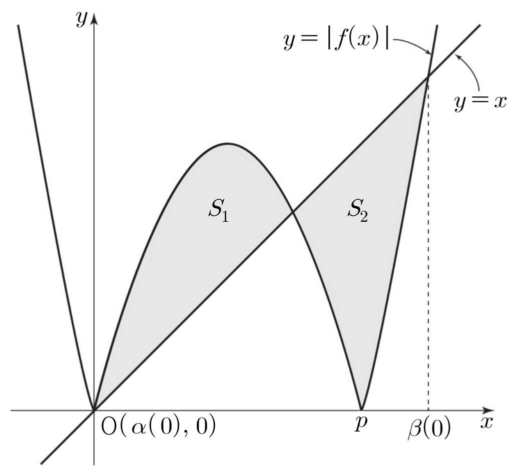
$t=0$일 때의 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와

직선 $y=x+t$의 개형은 [그림 3]과 같고,

함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=x$로

둘러싸인 2개 영역의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면

$g(0)=S_1-S_2$



[그림 3]

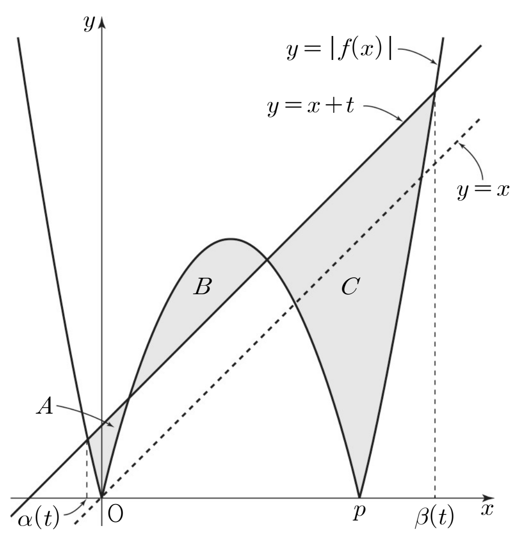
$0<t<t_1$일 때의 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와

직선 $y=x+t$의 개형은 [그림 4]와 같고,

함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=x+t$로

둘러싸인 3개 영역의 넓이를 각각 A, B, C라 하면

$g(t)=-A+B-C$



[그림 4]

$0<t<t_1$인 모든 실수 t에 대하여

$B<S_1$, $C>S_2$이므로

$-A+B-C<B-C<S_1-S_2$

그러므로 $0\le t<t_1$인 모든 실수 t에 대하여

$g(t)\le g(0)$이며 $g(0)=\dfrac{1}{2}$

방정식 $|f(x)|=x$의 해가 0, $p-1$, $p+1$이므로

$\alpha(0)=0$, $\beta(0)=p+1$

$$
\begin{aligned}
g(0)&=\int_{\alpha(0)}^{\beta(0)}(|f(x)|-x)dx\\
&=\int_0^{p+1}|f(x)|dx-\int_0^{p+1}x\,dx\\
&=\int_0^{p}(-f(x))dx+\int_p^{p+1}f(x)dx-\int_0^{p+1}x\,dx\\
&=\int_0^{p}(-x^2+px)dx\\
&\quad+\int_p^{p+1}(x^2-px)dx-\frac{(p+1)^2}{2}\\
&=\frac{p^3-3p^2-3p-1}{6}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$p^3-3p^2-3p-4=(p-4)(p^2+p+1)=0$

따라서 $p=4$

16. [출제의도] 호도법 이해하기

부채꼴의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 8^2\times\dfrac{3}{4}\pi=24\pi$이므로 $a=24$

17. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$\displaystyle\sum_{k=1}^{7}a_{2k}=\sum_{k=1}^{7}\left(k^2-a_{2k-1}\right)=\sum_{k=1}^{7}k^2-\sum_{k=1}^{7}a_{2k-1}$에서

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{7}k^2&=\sum_{k=1}^{7}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{7}a_{2k}\\
&=\sum_{k=1}^{7}\left(a_{2k-1}+a_{2k}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{14}a_k
\end{aligned}
$$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{14}a_k=\frac{7\times8\times15}{6}=140$

18. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

$x-4$, $x-6$은 로그의 진수이므로

$x-4>0$, $x-6>0$에서 $x>6$

방정식 $\log_2(x-4)=\log_{\frac{1}{2}}(x-6)+3$에서

$\log_2(x-4)=-\log_2(x-6)+3$

$\log_2(x-4)(x-6)=3$

$(x-4)(x-6)=2^3$

$x^2-10x+16=(x-2)(x-8)=0$

따라서 $x>6$이므로 $x=8$

19. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

$f(x)=x^3-3ax^2+40a^2$이라 하자.

x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 1이려면 $x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수가 1이어야 한다.

$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2a\,(a>0)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(0)=40a^2>0$이므로 $f(2a)=0$이어야 한다.

$f(2a)=8a^3-12a^3+40a^2=-4a^2(a-10)=0$

따라서 $a=10$

20. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

조건 (나)에서 $b_3+b_5\ne 2b_4$이므로

세 수 b_3, b_4, b_5는 이 순서대로 등차수열을 이루지 않는다. ⋯ ㉠

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$d\ge 0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이 되어 $b_n=a_n$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

그러므로 $d<0$이며 $a_3>a_4>a_5$이다.

(i) $a_3>a_4>a_5>0$일 때

$b_3=a_3$, $b_4=a_4$, $b_5=a_5$이므로

㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_3>a_4>0\ge a_5$일 때

$a_6=a_5+d<0$이므로 $b_6=-2a_6$

$(b_4+b_6)-2b_5=(a_4-2a_6)-2(-2a_5)$

$=(8+3d)-2(8+5d)+4(8+4d)$
$=24+9d$
$=3a_4>0$

$b_4+b_6 \neq 2b_5$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $a_3>0 \geq a_4>a_5$일 때

$a_3=8+2d>0$에서 $d>-4$이고

$a_4=8+3d \leq 0$에서 $d \leq -\frac{8}{3}$이므로

$-4<d \leq -\frac{8}{3}$

$a_6=a_5+d<0$이므로 $b_6=-2a_6$

$b_4=-2a_4,\ b_5=-2a_5,\ b_6=-2a_6$이므로

$b_4+b_6=2b_5$가 성립한다.

$b_3+b_5=2b_4+6$에서

$a_3+(-2a_5)=2\times(-2a_4)+6$

$(8+2d)-2\times(8+4d)=-4\times(8+3d)+6$

$-8-6d=-26-12d,\ d=-3$

(iv) $0 \geq a_3>a_4>a_5$일 때

$b_3=-2a_3,\ b_4=-2a_4,\ b_5=-2a_5$이므로

㉠을 만족시키지 않는다.

(i) ~ (iv)에 의하여 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 -3이므로 $a_n=8-3(n-1)=-3n+11$이고

$$b_n=\begin{cases} a_n & (n \leq 3) \\ -2a_n & (n \geq 4) \end{cases}$$

따라서 $\sum_{k=1}^{10} b_k=\sum_{k=1}^{3} a_k-2\sum_{k=4}^{10} a_k$

$=(8+5+2)-2\times\frac{7(a_4+a_{10})}{2}$

$=15-7(-1-19)=155$

21. [출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=p$에서 연속이다.

$\lim_{x \to p-} g(x)=\lim_{x \to p-} f(x)=f(p)$이고

$g(p)=kf(0)=0$이므로 $f(p)=0$

$f(x)=x(x-p)(x-a)$ (a는 상수)라 하면

$$g(x)=\begin{cases} x(x-p)(x-a) & (x<p) \\ k(x-p)(x-2p)\{x-(a+p)\} & (x \geq p) \end{cases}$$

$p>0$이므로 $0,\ p,\ 2p$는 방정식 $g(x)=0$의 실근이다.

$a=p$ 또는 $a=0$이면 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근이 $0,\ p,\ 2p$뿐이므로

방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합이 $3p$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i) $a>p$일 때

방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근은 $0,\ p,\ 2p,\ a+p$

$0+p+2p+(a+p) \neq 2p$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $0<a<p$일 때

방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근은 $0,\ a,\ p,\ a+p,\ 2p$

$0+a+p+(a+p)+2p \neq 2p$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $a<0$일 때

방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합은 $a+0+p+2p=a+3p$

조건 (나)에 의하여 $a+3p=2p$에서 $a=-p$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$a=-p$이며 $f(x)=x(x+p)(x-p)$

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$가 $x=p$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \to 0-} \frac{g(p+h)-g(p)}{h}=\lim_{h \to 0-} \frac{(p+h)h(2p+h)}{h}=2p^2,$$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{g(p+h)-g(p)}{h}=\lim_{h \to 0+} \frac{kh(-p+h)(p+h)}{h}=-kp^2$$

에서 $2p^2=-kp^2,\ k=-2$

그러므로 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<p) \\ -2f(x-p) & (x \geq p) \end{cases}$

$f'(x)=3x^2-p^2=0$에서

$x=-\frac{\sqrt{3}}{3}p$ 또는 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}p$

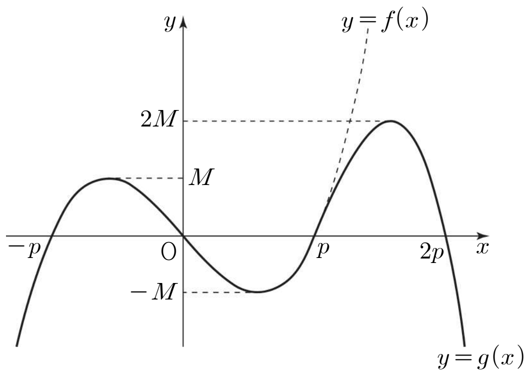
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}p$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}p$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}p^3$	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}p^3$	↗

함수 $f(x)$의 극댓값을 M이라 하면

함수 $f(x)$의 극솟값은 $-M$이다.

$k=-2$이므로 함수 $g(x)$의 극값 중 가장 큰 값은 $2M$이며 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$의 극값 중 가장 큰 값이 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로

$2M=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$2\times\frac{2\sqrt{3}}{9}p^3=\frac{3\sqrt{3}}{2}$에서 $p=\frac{3}{2}$

그러므로 $f(x)=x^3-\frac{9}{4}x$

따라서 $f(4)=4^3-\frac{9}{4}\times 4=55$

22. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 추론하기

두 점 A, B 중에서 x좌표가 작은 점을 A라 하고,

점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(a,\ 2^{a+1}+k)$ (a는 실수)라 하자.

직선 AB의 기울기가 1이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$이므로

$\mathrm{B}(a+2,\ 2^{a+1}+k+2)$

점 B가 곡선 $y=2^{x+1}+k$ 위의 점이므로

$2^{a+1}+k+2=2^{(a+2)+1}+k$

$(2^3-2)\times 2^a=2$에서

$2^a=\frac{1}{3},\ a=-\log_2 3 \ \cdots$ ㉠

이제 선분 AB의 중점을 M이라 하자.

점 M의 좌표가 $\mathrm{M}(a+1,\ 2^{a+1}+k+1)$이므로

점 M은 곡선 $y=2^x+k+1$ 위의 점이다.

점 M을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨

점 $\mathrm{M}'(a+1,\ 2^{a+1}+k)$는 곡선 $y=2^x+k$ 위에 있고,

점 C는 곡선 $y=\log_2(x-k)+1$ 위에 있으므로

점 C를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨

점 C′은 곡선 $y=\log_2(x-k)$ 위에 있다.

직선 CM의 기울기가 -1이므로

직선 C′M′의 기울기도 -1이고,

두 곡선 $y=2^x+k,\ y=\log_2(x-k)$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 C′은 점 M′을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점이다.

점 C′의 좌표는 $\mathrm{C}'(2^{a+1}+k,\ a+1)$이므로

점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(2^{a+1}+k,\ a+2)$이다.

삼각형 ABC가 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{CM}}=\sqrt{6}$이고,

직선 CM의 기울기가 -1이므로

점 C의 x좌표와 점 M의 x좌표의 차는 $\sqrt{3}$이다.

$|(2^{a+1}+k)-(a+1)|=\sqrt{3}$

$k=-2^{a+1}+a+1+\sqrt{3}$

또는 $k=-2^{a+1}+a+1-\sqrt{3}$

그러므로 $S=-2\times 2^{a+1}+2a+2$

㉠에 의하여

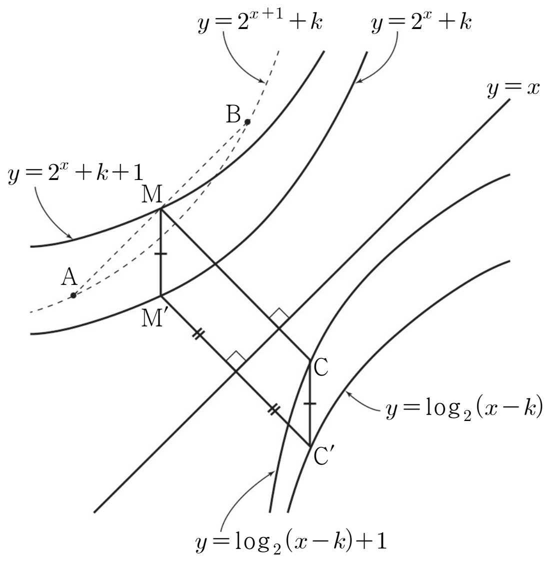
$S=-2\times\frac{2}{3}+2\times(-\log_2 3)+2$

$=\frac{2}{3}-2\log_2 3$

따라서 $2^{-S+\frac{2}{3}}=2^{2\log_2 3}=2^{\log_2 9}=9$

【 참고 】

$k=-2^{a+1}+a+1+\sqrt{3}$일 때의 네 점 M, M′, C, C′의 관계를 나타내면 그림과 같다.



[기하]

23	③	**24**	②	**25**	③	**26**	①	**27**	⑤
28	②	**29**	9	**30**	80				

23. [출제의도] 타원의 방정식 계산하기

타원 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{7}=1$의 한 초점의 좌표가 $(c,\ 0)$이므로

$c^2=10-7=3$에서 $c=\sqrt{3}$

24. [출제의도] 벡터의 연산 이해하기

$\vec{a}+2(\vec{b}-\vec{a})=-\vec{a}+2\vec{b}$이고

두 벡터 $-\vec{a}+2\vec{b},\ -2\vec{a}+k\vec{b}$가 서로 평행하므로

$-2\vec{a}+k\vec{b}=l(-\vec{a}+2\vec{b})$

를 만족시키는 실수 $l\ (l \neq 0)$이 존재한다.

$-2\vec{a}+k\vec{b}=-l\vec{a}+2l\vec{b}$에서
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않으므로
$-2=-l$, $k=2l$
따라서 $k=4$

25. [출제의도] 타원의 정의 이해하기

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$이라 하자.
삼각형 PRF의 둘레의 길이와
삼각형 QF′R의 둘레의 길이의 합은
$(\overline{PR}+\overline{RF}+\overline{FP})+(\overline{QF'}+\overline{F'R}+\overline{RQ})$
$=(\overline{PF}+\overline{PR}+\overline{RF'})+(\overline{QR}+\overline{RF}+\overline{QF'})$
$=(\overline{PF}+\overline{PF'})+(\overline{QF}+\overline{QF'})$
$=2a+2a=4a=12$
에서 $a=3$
$b^2=3^2-(\sqrt{3})^2=6$, $b=\sqrt{6}$
따라서 타원의 단축의 길이는 $2\sqrt{6}$

26. [출제의도] 포물선의 접선의 방정식 이해하기

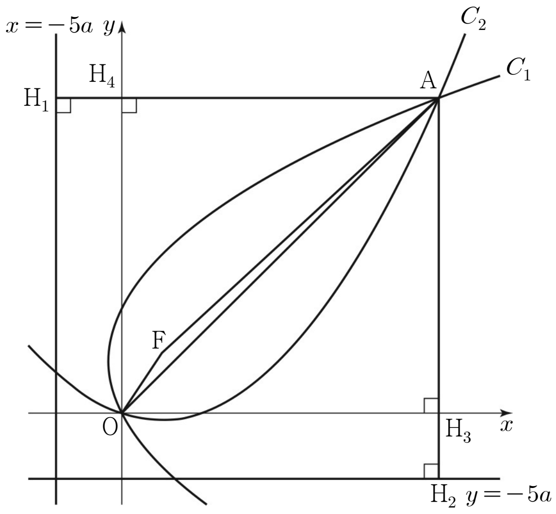
점 A의 좌표를 $A(x_1, y_1)$이라 하자.
포물선 위의 점 A에서의 접선의 방정식은
$y_1y=2p(x+x_1)$이므로 접선의 기울기는 $\frac{2p}{y_1}$
접선의 기울기와 직선 OA의 기울기의 곱이
$\frac{3}{2}$이므로
$\frac{2p}{y_1}\times\frac{y_1}{x_1}=\frac{3}{2}$에서 $x_1=\frac{4p}{3}$
점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을
H라 하면 $\overline{AH}=\overline{AF}$이므로
$x_1+p=\frac{4p}{3}+p=\frac{7p}{3}=14$
따라서 $p=6$

27. [출제의도] 쌍곡선의 점근선을 활용하여 문제해결하기

두 직선 l, m은 y축에 대하여 대칭이고,
직선 PF는 직선 m과 서로 평행하므로 $\overline{OP}=\overline{PF}$
$\angle F'PF=\frac{\pi}{2}$에서 점 P는 선분 FF′을 지름으로
하는 원 위의 점이므로 $\overline{OP}=\overline{OF}$
그러므로 삼각형 POF는 한 변의 길이가 c인
정삼각형이다.
$\angle PFF'=\frac{\pi}{3}$이므로 직각삼각형 PF′F에서
$\overline{PF'}=\sqrt{3}c$
쌍곡선 C의 방정식을
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$이라 하면
점근선 l의 방정식이 $y=\frac{b}{a}x$이고
$\angle FOP=\frac{\pi}{3}$이므로 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$에서 $b=\sqrt{3}a$
점 F가 쌍곡선 C의 초점이므로
$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(\sqrt{3}a)^2}=2a$
$\overline{PQ}=2$에서 $\overline{QF}=c-2$
점 Q가 쌍곡선 위의 점이므로
$\overline{QF'}-\overline{QF}=2a$에서 $\overline{QF'}=\overline{QF}+2a=2c-2$
삼각형 PF′Q가 직각삼각형이므로
$(2c-2)^2=(\sqrt{3}c)^2+2^2$, $c^2-8c=0$
따라서 $c=8$

28. [출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 추론하기

$\overline{OF}=\sqrt{(3a)^2+(4a)^2}=5a$이고
점 O와 두 직선 $x=-5a$, $y=-5a$ 사이의 거리가
모두 $5a$이므로 점 O는 두 포물선 C_1, C_2가
만나는 점이다.
점 O가 점 A이면 $\overline{OA}=6$을 만족시키지 않으므로
점 O는 점 B이다.
$\overline{BF}=\overline{OF}=5a$
점 A에서 두 직선 $x=-5a$, $y=-5a$에 내린
수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 $\overline{AF}=\overline{AH_1}=\overline{AH_2}$
점 A에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 H_3, H_4라
하면 $\overline{AH_3}=\overline{AH_4}=\overline{AH_1}-5a$



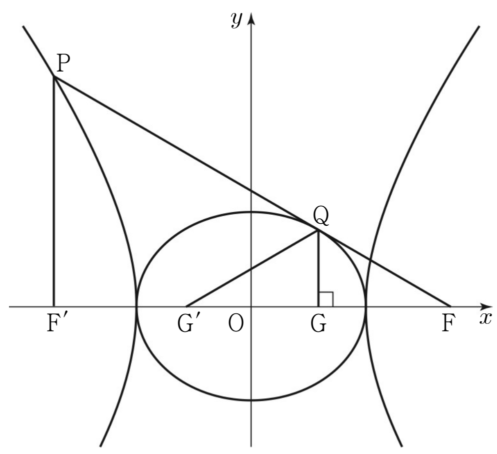
그러므로 사각형 AH_4OH_3는 한 변의 길이가
$\overline{AH_1}-5a$인 정사각형이다.
이때 선분 OA는 정사각형 AH_4OH_3의 대각선이므로
$\overline{OA}=\sqrt{2}(\overline{AH_1}-5a)=6$에서 $\overline{AH_1}=3\sqrt{2}+5a$
$\overline{AF}=\overline{AH_1}=3\sqrt{2}+5a$
따라서 $\overline{AF}-\overline{BF}=(3\sqrt{2}+5a)-5a=3\sqrt{2}$

29. [출제의도] 벡터의 연산을 이용하여 추론하기

점 M을 직선 BC에 대하여 대칭이동한 점을 E라
하고, $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{EP'}$을 만족시키는 점을 P′이라 하면
$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CE}$이므로
$\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{MQ}=(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CP})+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BQ})$
$=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{EP'}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BQ}$
$=(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EP'})+\overrightarrow{BQ}$
$=\overrightarrow{DP'}+\overrightarrow{BQ}$
$|\overrightarrow{BQ}|=1$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{DP'}$, $\overrightarrow{BQ}$의 방향이 같고
$|\overrightarrow{DP'}|$의 값이 최대일 때, $|\overrightarrow{DP'}+\overrightarrow{BQ}|$의 값은
최대이다.
$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{EB'}$을 만족시키는 점을 B′이라 하고,
직선 DB′과 평행하고 점 B를 지나는 직선이
호 AC와 만나는 점을 X라 하자.
두 벡터 $\overrightarrow{DB'}$, $\overrightarrow{BX}$의 방향이 같고
$|\overrightarrow{DP'}|\le|\overrightarrow{DB'}|$이므로
점 P′이 점 B′이고 점 Q가 점 X일 때
$|\overrightarrow{DP'}+\overrightarrow{BQ}|$의 값은 최대이다.
$|\overrightarrow{DB'}|=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$이므로
$|\overrightarrow{DP'}+\overrightarrow{BQ}|\le|\overrightarrow{DB'}+\overrightarrow{BX}|$
$=|\overrightarrow{DB'}|+|\overrightarrow{BX}|$
$=\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}$
따라서 $p=2$, $q=7$이므로 $p+q=9$

30. [출제의도] 타원의 접선의 방정식을 활용하여 문제 해결하기

두 점 P, F를 지나는 직선의 기울기가 음수이므로
점 Q는 제1사분면 위의 점이다.
점 Q의 좌표를 $Q(k, b^2)\,(k>0)$이라 하면
점 Q가 타원 위의 점이므로
$k^2+\frac{b^4}{b^2}=1$에서 $k^2=1-b^2$
그러므로 $Q(\sqrt{1-b^2}, b^2)$
타원 위의 점 Q에서의 접선의 방정식은
$\sqrt{1-b^2}x+\frac{b^2y}{b^2}=1$, $\sqrt{1-b^2}x+y=1$
이 직선이 점 $F(c, 0)$을 지나므로 $c=\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$
이때 점 F는 쌍곡선의 초점이므로
$c=\sqrt{1+a^2}=\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$ ⋯ ㉠
타원의 두 초점을
$G(d, 0)$, $G'(-d, 0)\,(d>0)$이라 하면
$d^2=1-b^2$이므로
$G(\sqrt{1-b^2}, 0)$, $G'(-\sqrt{1-b^2}, 0)$
직선 QG가 x축에 수직이므로
$\overline{QG}=b^2$



타원의 장축의 길이가 2이므로
$\overline{QG}+\overline{QG'}=2$에서 $\overline{QG'}=2-\overline{QG}=2-b^2$
쌍곡선의 주축의 길이가 2이므로
$\overline{PF}-\overline{PF'}=2$에서 $\overline{PF}=\overline{PF'}+2$
$\overline{PQ}=\overline{PF'}+b^2$이므로
$\overline{QF}=\overline{PF}-\overline{PQ}$
$=(\overline{PF'}+2)-(\overline{PF'}+b^2)$
$=2-b^2$
$\overline{QG'}=\overline{QF}$이므로
삼각형 QG′F는 이등변삼각형이다.
점 G는 선분 FG′의 중점이므로 $\overline{FG}=\overline{GG'}$
$\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}-\sqrt{1-b^2}=2\sqrt{1-b^2}$에서 $b^2=\frac{2}{3}$
㉠에 의하여 $a^2=2$
따라서 $30(a^2+b^2)=30\times\left(2+\frac{2}{3}\right)=80$