정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	⑤	2	①	3	④	4	③	5	④
6	②	7	③	8	②	9	③	10	①
11	①	12	③	13	④	14	④	15	⑤
16	⑤	17	④	18	②	19	①	20	②
21	①	22	15	23	7	24	6	25	18
26	11	27	82	28	143	29	84	30	23

해 설

1. [출제의도] 복소수 계산하기

$(4+i)+(1-2i)=(4+1)+(1-2)i=5-i$

2. [출제의도] 인수정리 계산하기

다항식 $P(x)=2x^3-5x^2+ax-3$이 $x-1$로 나누어떨어지므로 $P(1)=0$

$P(1)=2\times1^3-5\times1^2+a\times1-3=0$

따라서 $a=6$

3. [출제의도] 이차부등식 계산하기

이차부등식의 해가 $1<x<3$이므로

$(x-1)(x-3)<0$

$x^2-4x+3<0$

따라서 $k=4$

4. [출제의도] 인수분해 이해하기

x^3+2x^2+x+2

$=x^2(x+2)+(x+2)$

$=(x^2+1)(x+2)$

$a=1,\ b=2$

따라서 $a+b=3$

5. [출제의도] 연립부등식 계산하기

$x^2-3x+5\le x+5$에서 $x^2-4x\le0$이므로

$0\le x\le4$ ……㉠

$x+5\le8$에서

$x\le3$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여 $0\le x\le3$

연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x는 $0,\ 1,\ 2,\ 3$이므로 개수는 4

6. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기

주어진 식에 $x=0$을 대입하면

$P(1)-P(0)=P(1)-1=3$이므로 $P(1)=4$

$x=1$을 대입하면

$P(2)-P(1)=P(2)-4=5$

따라서 $P(2)=9$

7. [출제의도] 이차방정식의 근 이해하기

서로 다른 두 허근 $\alpha,\ \beta$에 대하여

$\alpha=p+qi,\ \beta=p-qi$ ($p,\ q$는 실수, $q\neq0$)라 하자.

$\alpha i+\beta=(p-q)+(p-q)i=0$이므로 $p=q$

$\alpha=p+pi,\ \beta=p-pi$이므로 $\alpha+\beta=2p=6$,

$p=3$이고 $\alpha\beta=(p+pi)(p-pi)=2p^2=18$

따라서 $k=\alpha\beta=18$

[다른 풀이]

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=k$

$\alpha i=-\beta$의 양변을 제곱하면

$-\alpha^2=\beta^2$이므로 $\alpha^2+\beta^2=0$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$이므로

$36-2k=0$

따라서 $k=18$

8. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소 문제 해결하기

$f(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$이라 하자.

(i) $a<0$일 때

$f(x)$는 $x=a+3$에서 최솟값을 가지므로

$f(a+3)=a^2+1=5,\ a=-2$

(ii) $0\le a\le3$일 때

$f(x)$의 최솟값은 1이다.

(iii) $a>3$일 때

$f(x)$는 $x=a$에서 최솟값을 가지므로

$f(a)=(a-3)^2+1=5,\ a=5$

(i)~(iii)에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 3

9. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계 문제 해결하기

직선 $y=ax+b$와

이차함수 $y=x^2-2mx+m^2+3m$의 그래프가

실수 m의 값에 관계없이 항상 한 점에서 만나므로

$x^2-2mx+m^2+3m=ax+b$

$x^2-(2m+a)x+m^2+3m-b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2m+a)^2-4(m^2+3m-b)$

$\quad=(4a-12)m+a^2+4b$

가 실수 m의 값에 관계없이 항상 0이어야 한다.

즉, $4a-12=0,\ a^2+4b=0$

따라서 $a=3,\ b=-\frac{9}{4}$이고 $a+b=\frac{3}{4}$

10. [출제의도] 이차부등식 이해하기

$f(x)=x^2-2x-a$라 하면 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축은 $x=1$이므로 $x^2-2x-a<0$을 만족시키는 정수 x의 개수가 5가 되려면

$x=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

즉, $f(3)<0,\ f(4)\ge0$이어야 한다.

$f(3)=9-6-a<0,\ a>3$ ……㉠

$f(4)=8-a\ge0,\ a\le8$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $3<a\le8$이므로 실수 a의 최댓값은 8

11. [출제의도] 나머지정리 문제 해결하기

(가)에서 $P(x)=(x-2)^2Q(x)+2Q(x)$이다.

$Q(x)=x+a$라 하면

$P(x)=(x-2)^2(x+a)+2(x+a)$

(나)에서 $P(1)=0$이므로

$P(1)=3(1+a)=0,\ a=-1$

$P(x)=(x-2)^2(x-1)+2(x-1)$

$\quad=(x-1)(x^2-4x+6)$

따라서 $P(3)=6$

12. [출제의도] 다항식의 연산 문제 해결하기

$\overline{MH}=a,\ \overline{NH}=b$라 하자.

점 M, N은 각각 직각삼각형 ABH, BCH의 외심이므로

$\overline{MH}=\overline{MA}=\overline{MB},\ \overline{NH}=\overline{NB}=\overline{NC}$

$\overline{AB}=2\times\overline{MH}=2a$

$\overline{BC}=2\times\overline{NH}=2b$

$\overline{AC}^2=(2a)^2+(2b)^2=56,\ a^2+b^2=14$

(삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times2a\times2b=2ab=10$

$ab=5$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=14+10=24$,

$a+b=2\sqrt{6}$

따라서 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=18\sqrt{6}$

13. [출제의도] 이차함수 이해하기

직선 $y=x$와

이차함수 $f(x)=x^2-2(m+1)x+m^2-4$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로

$x^2-2(m+1)x+m^2-4=x$

$x^2-(2m+3)x+m^2-4=0$ ……㉠

㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면

㉠의 판별식 $D>0$이어야 하므로

$D=(2m+3)^2-4(m^2-4)=12m+25>0$,

$m>-\frac{25}{12}$ ……㉡

$(a,\ f(a)),\ (b,\ f(b))$는 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$f(a)=a,\ f(b)=b$

$a,\ b$는 이차방정식 ㉠의 두 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$f(a)+f(b)=a+b=2m+3<16$

$m<\frac{13}{2}$ ……㉢

㉡, ㉢에 의하여 $-\frac{25}{12}<m<\frac{13}{2}$이므로

모든 정수 m은 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

따라서 모든 정수 m의 개수는 9

14. [출제의도] 여러 가지 방정식 추론하기

다항식 $P(x)$를 인수분해하면

$P(x)=(x+a)(x-a)\{x^2-(\boxed{4-a^2})\}$

이고, $Q(x)=x^2-(\boxed{4-a^2})$라 하면

$P(x)=(x+a)(x-a)Q(x)$이다.

$a\neq0$이므로 $a,\ -a$는 방정식 $P(x)=0$의 서로 다른 두 실근이다.

방정식 $Q(x)=0$이 중근을 갖는 경우에는

$\boxed{4-a^2}=0$이므로 방정식 $P(x)=0$은 서로 다른 세 실근 $-a,\ 0,\ a$를 갖는다.

따라서 방정식 $P(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 경우는 다음 두 가지이다.

(i) 방정식 $Q(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

$Q(x)=0$의 서로 다른 두 실근은 $a,\ -a$이므로

$a=\boxed{\sqrt{2}}$

(ii) 방정식 $Q(x)=0$이 실근을 갖지 않는 경우

$\boxed{4-a^2}<0$ ……(*)

이므로 부등식 (*)의 해를 구하면 $a>\boxed{2}$

(i), (ii)에 의하여 방정식 $P(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값의 범위는

$a=\boxed{\sqrt{2}}$ 또는 $a>\boxed{2}$

$f(a)=4-a^2,\ p=\sqrt{2},\ q=2$

따라서 $f(p)\times q=4$

15. [출제의도] 연립부등식 이해하기

$$\begin{cases}|x-6|\le3 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-(4a+1)x+3a^2+a\le0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠의 해는 $3\le x\le9$ ……㉢

㉡에서 $(x-a)\{x-(3a+1)\}\le0$

(i) $a\le-\frac{1}{2}$인 경우

$3a+1\le x\le a$ ……㉣

㉢과 ㉣을 동시에 만족시키는 정수 x는 존재하지 않는다.

(ii) $a>-\frac{1}{2}$인 경우

$a\le x\le3a+1$ ……㉤

㉤에서

$a=1$일 때, $1\le x\le4$이므로 ㉢과 ㉤을 동시에 만족시키는 정수 x는 3, 4

$a=8$일 때, $8 \le x \le 25$이므로 ㉢과 ㉤을 동시에 만족시키는 정수 x는 8, 9
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여
$a=1$, $a=8$일 때, 정수 x의 개수가 2이다.
따라서 모든 정수 a의 값의 합은 9

16. [출제의도] 나머지정리 문제 해결하기

(가)에서 나머지정리에 의하여 $P(2)+P(3)=7$
(나)에서 $P(x)$를 x^2-5x+6으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면,
$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+R(x)$이다.
$P(2)=R(2)$, $P(3)=R(3)$
$P(2)+P(3)=R(2)+R(3)=7$ ……㉠
$R(x)=ax+b$ (a, b는 실수)라 하면
$R(2)-R(3)=R(1)-R(2)=-a$이다.
$R(2)-R(3)=-a=5$ ……㉡
㉠, ㉡에 의하여 $a=-5$, $b=16$
$R(x)=-5x+16$
따라서 $R(1)=11$

17. [출제의도] 다항식의 연산 이해하기

$A_1(x)=2x^3+3x^2+x+1$, $A_2(x)=3x^3+8x^2+3x$, $A_3(x)=5x^3+12x^2+3x-1$이라 하자.
$A_1(x)$, $A_2(x)$, $A_3(x)$를 다항식 $P(x)$로 나눈 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $Q_3(x)$라 하면
$A_1(x)=P(x)Q_1(x)+R(x)$ ……㉠
$A_2(x)=P(x)Q_2(x)+2R(x)$ ……㉡
$A_3(x)=P(x)Q_3(x)+3R(x)$ ……㉢
㉠, ㉡에서
$2A_1(x)-A_2(x)=P(x)\{2Q_1(x)-Q_2(x)\}$
즉, $x^3-2x^2-x+2=P(x)\{2Q_1(x)-Q_2(x)\}$이므로
$(x+1)(x-1)(x-2)=P(x)\{2Q_1(x)-Q_2(x)\}$ …㉣
㉠, ㉢에서
$3A_1(x)-A_3(x)=P(x)\{3Q_1(x)-Q_3(x)\}$
즉, $x^3-3x^2+4=P(x)\{3Q_1(x)-Q_3(x)\}$이므로
$(x-2)^2(x+1)=P(x)\{3Q_1(x)-Q_3(x)\}$ ……㉤
이차다항식 $P(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로
㉣, ㉤에서 $P(x)=(x+1)(x-2)$
따라서 $P(3)=4$

[다른 풀이]

$A_1(x)=2x^3+3x^2+x+1$, $A_2(x)=3x^3+8x^2+3x$, $A_3(x)=5x^3+12x^2+3x-1$이라 하자.
$A_1(x)$, $A_2(x)$, $A_3(x)$를 다항식 $P(x)$로 나눈 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $Q_3(x)$라 하면
$A_1(x)=P(x)Q_1(x)+R(x)$ ……㉠
$A_2(x)=P(x)Q_2(x)+2R(x)$ ……㉡
$A_3(x)=P(x)Q_3(x)+3R(x)$ ……㉢
㉠, ㉡, ㉢에서
$A_3(x)-A_1(x)-A_2(x)$
$=P(x)\{Q_3(x)-Q_1(x)-Q_2(x)\}=x^2-x-2$
이차다항식 $P(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로
$P(x)=x^2-x-2$
따라서 $P(3)=4$

18. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{HJ}}=2x$ $(0<x<1)$라 하면 $\overline{\mathrm{AH}}=1-x$이고
$\angle \mathrm{IHA}=60^\circ$이므로 $\overline{\mathrm{AI}}=\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{3}(1-x)$
삼각형 EHJ와 삼각형 AIH의 넓이를 각각 $S_1(x)$, $S_2(x)$라 하면
$S_1(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2x)^2=\sqrt{3}x^2$,
$S_2(x)=\dfrac{1}{2}\times(1-x)\times\sqrt{3}(1-x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-x)^2$

$$S_1(x)+S_2(x)=\sqrt{3}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(3x^2-2x+1)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right\}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{3}$$

은 $x=\dfrac{1}{3}$일 때 최솟값 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$을 갖는다.
따라서 삼각형 EHJ의 넓이와 삼각형 AIH의 넓이의 합의 최솟값은 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

19. [출제의도] 이차함수 문제 해결하기

정사각형 ACDB의 한 변의 길이는 $\overline{\mathrm{AB}}=2t$이다.
점 C, D의 y좌표가 t^2+2t이면
$S_1:S_2=5:1$을 만족하지 않으므로
$\mathrm{C}(-t,\ t^2-2t)$, $\mathrm{D}(t,\ t^2-2t)$라 하자.
$S_1=\dfrac{1}{2}\times2t\times t^2=t^3$
(ⅰ) $0<t<2$인 경우
$S_2=\dfrac{1}{2}\times2t\times(-t^2+2t)=-t^3+2t^2$
$S_1:S_2=5:1$이므로 $t^3=5(-t^3+2t^2)$,
$t^2(3t-5)=0$, $t=\dfrac{5}{3}$
(ⅱ) $t>2$인 경우
$S_2=\dfrac{1}{2}\times2t\times(t^2-2t)=t^3-2t^2$
$S_1:S_2=5:1$이므로 $t^3=5(t^3-2t^2)$,
$t^2(2t-5)=0$, $t=\dfrac{5}{2}$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 실수 t의 값의 합은
$\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{25}{6}$

20. [출제의도] 연립부등식 이해하기

$$\begin{cases}(mx-3)(x+m)\ge0 & \cdots\cdots ㉠\\(x-n)(x-3)<0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$
㉠의 해는
$m>0$일 때, $x\le-m$ 또는 $x\ge\dfrac{3}{m}$
$m<0$일 때, $\dfrac{3}{m}\le x\le-m$
㉡의 해는
$n=3$일 때, 해가 없다.
$n<3$일 때, $n<x<3$
$n>3$일 때, $3<x<n$
이므로 $1\le n\le10$에서 정수인 해를 가지는 경우는
$n=1$, 5, 6, 7, 8, 9, 10
연립부등식의 정수인 해의 개수가 1이 될 때는
(ⅰ) $m>0$인 경우
$n=1$일 때, $m=2$, 3, 4, 5이므로
순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 4
$n=5$일 때, $m=1$, 2, 3, 4, 5이므로
순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 5
(ⅱ) $m<0$인 경우
$n=1$일 때, $m=-5$, -4, -3, -2이므로
순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 4
$n=5$일 때, $m=-5$, -4이므로
순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 2
$n=6$, 7, 8, 9, 10일 때, $m=-4$이므로
순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 5
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $4+5+4+2+5=20$

21. [출제의도] 나머지정리 문제 해결하기

(가)에서 $A(x)B(x)$를 x^2-2x+1로 나눈 나머지는 0이고 (나)에서 $B(1)=0$이므로 $A(x)$와 $B(x)$는 다음의 두 가지 꼴 중 하나이다.
(ⅰ) $A(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수), $B(x)=(x-1)^2$인 경우
$(B(x))^2=(x-1)^4=(x-1)(x-2)Q(x)+16(x-1)$
$x=2$를 대입하면 식이 성립하지 않는다.
(ⅱ) $A(x)=(x-1)(x^2+lx+m)$,
$B(x)=(x-1)(x+n)$인 경우 (l, m, n은 상수, $n\ne-1$)
$(B(x))^2=(x-1)^2(x+n)^2$
$\qquad=(x-1)(x-2)Q(x)+16(x-1)$
$x=2$를 대입하면 $(B(2))^2=16$
(다)에서 $B(2)>0$이므로 $B(2)=4$, $n=2$
$(B(x))^2=(x-1)^2(x+2)^2$
$\qquad=(x-1)(x-2)Q(x)+16(x-1)$
$(x-1)(x+2)^2=(x-2)Q(x)+16$에서
$l=5$, $m=10$이므로 $Q(x)=x^2+5x+10$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여
$A(x)=(x-1)(x^2+5x+10)$이고 $A(3)=68$

[다른 풀이]

(나)에 의하여
$(B(x))^2=(x-1)(x-2)Q(x)+16(x-1)$
$\qquad=(x-1)\{(x-2)Q(x)+16\}$ ……㉠
$(B(1))^2=0$이므로 $B(1)=0$
$(B(x))^2$이 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.
$(x-2)Q(x)+16$은 $x-1$을 인수로 가지므로
$Q(1)=16$
㉠에 $x=2$를 대입하면 $(B(2))^2=16$
(다)에 의하여 $B(2)=4$
$B(x)=(x-1)(x+2)$이고 $B(3)=10$
(가)에서 $A(x)B(x)$는 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 $A(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.
㉠에서 $(B(x))^2$은 사차다항식이므로
$Q(x)$는 이차다항식이다.
$Q(1)\ne0$이고 $A(x)$는 $Q(x)$로 나누어떨어지므로
$A(x)=(x-1)Q(x)$
㉠에 $x=3$을 대입하면
$(B(3))^2=(3-1)\{(3-2)Q(3)+16\}$
$100=2Q(3)+32$이고 $Q(3)=34$
따라서 $A(3)=(3-1)Q(3)=68$

22. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기

$(x+a)(x+2)=x^2+(a+2)x+2a$에서
$x^2+(a+2)x+2a=x^2+bx+6$
$a=3$, $b=5$
따라서 $a\times b=15$

23. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 계산하기

$|x-a|<5$에서
$-5<x-a<5$, $a-5<x<a+5$
의 해가 $-4<x<b$ 이므로 $a=1$, $b=6$
따라서 $a+b=7$

24. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계 이해하기

α, β는 이차방정식 $x^2+ax+5=0$의 근이므로
근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=5$
$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=6+a=12$
따라서 $a=6$

25. [출제의도] 복소수의 연산 이해하기

$\left(\dfrac{\overline{z}}{z}\right)^2=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2=\left(\dfrac{2i}{2}\right)^2=-1$
$\left(\dfrac{z}{\sqrt{2}}\right)^2=\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{-2i}{2}=-i$이므로

정답 및 해설

$\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^{2n}+\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=(-1)^n+(-i)^n$

$(-1)^n+(-i)^n=0$ 에서

음이 아닌 정수 k에 대하여

$n=4k+1$ 일 때, $(-1)^n+(-i)^n=-1-i$

$n=4k+2$ 일 때, $(-1)^n+(-i)^n=0$

$n=4k+3$ 일 때, $(-1)^n+(-i)^n=-1+i$

$n=4k+4$ 일 때, $(-1)^n+(-i)^n=2$

따라서 $n=2,\ 6,\ 10$ 이므로 합은 18

26. [출제의도] 삼차방정식의 근 추론하기

다항식 $x^3+(a+2)x^2+(a^2-3a+2)x+b$ 가 $x+1$ 을 인수로 가지므로

다항식 $x^3+(a+2)x^2+(a^2-3a+2)x+b$ 를 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|cccc} -1 & 1 & a+2 & a^2-3a+2 & b \\ & & -1 & -a-1 & -a^2+4a-1 \\ \hline & 1 & a+1 & a^2-4a+1 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3+(a+2)x^2+(a^2-3a+2)x+b$

$=(x+1)\{x^2+(a+1)x+(a^2-4a+1)\}$

$b=a^2-4a+1$

이차방정식 $x^2+(a+1)x+b=0$ 의 두 근은 α, β 이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(a+1)$, $\alpha\beta=b=a^2-4a+1$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$\quad=\{-(a+1)\}^2-2(a^2-4a+1)$

$\quad=-a^2+10a-1$

$\alpha^2+\beta^2=24$ 에서 $-a^2+10a-1=24$ 이므로 $a=5$

$b=a^2-4a+1$ 에 $a=5$ 를 대입하면 $b=6$

따라서 $a+b=11$

27. [출제의도] 이차함수 문제 해결하기

네 점 A, B, C, D의 x좌표를

각각 α_1, β_1, α_2, β_2 라 하자.

$\overline{\mathrm{AB}}=\beta_1-\alpha_1$, $\overline{\mathrm{CD}}=\beta_2-\alpha_2$

α_1, β_1 은 각각 $f(x)=k$ 의 해이므로

$\alpha_1+\beta_1=2$, $\alpha_1\beta_1=2-k$

α_2, β_2 는 각각 $g(x)=k$ 의 해이므로

$\alpha_2+\beta_2=8$, $\alpha_2\beta_2=6+k$

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{CD}}$ 이므로 $\beta_1-\alpha_1=2(\beta_2-\alpha_2)$

$(\beta_1-\alpha_1)^2=4(\beta_2-\alpha_2)^2$

$(\alpha_1+\beta_1)^2-4\alpha_1\beta_1=4\{(\alpha_2+\beta_2)^2-4\alpha_2\beta_2\}$

$2^2-4(2-k)=4\{8^2-4(6+k)\}$, $k=\frac{41}{5}$

따라서 $10k=82$

28. [출제의도] 다항식의 인수분해 추론하기

(가), (나)에서

$(B(1))^4-2(B(1))^3-(B(1))^2+2B(1)=24$

$\{B(1)-3\}\{B(1)+2\}\{(B(1))^2-B(1)+4\}=0$

$B(1)$ 은 실수이므로 $B(1)=3$ 또는 $B(1)=-2$

$B(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 일차다항식이므로

$B(x)=x+2$ 또는 $B(x)=x-3$

(ⅰ) $B(x)=x+2$ 인 경우

$A(x)=\{B(x)+1\}B(x)\{B(x)-1\}\{B(x)-2\}$

$A(x)=(x+3)(x+2)(x+1)x$

$A(2)\neq 0$ 이므로 조건 (나)를 만족하지 않는다.

(ⅱ) $B(x)=x-3$ 인 경우

$A(x)=\{B(x)+1\}B(x)\{B(x)-1\}\{B(x)-2\}$

$A(x)=(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$

$A(2)=0$ 이므로 조건 (나)를 만족한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$A(x)=(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$

$\quad=\{(x^2-7x-1)+11\}\{(x^2-7x-1)+13\}$

$\quad=(x^2-7x-1)^2+24(x^2-7x-1)+143$

따라서 $A(x)$를 x^2-7x-1로 나눈 나머지는 143

29. [출제의도] 다항식의 나눗셈 추론하기

(가)에서

$A(x)=B(x)\{B(x)+x\}+B(x)-x^2$ ……㉠

$B(x)$ 의 차수는 $B(x)-x^2$ 의 차수보다 크므로

$B(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차식이다.

$C(x)=B(x)-x$ 라고 하면 $B(x)=C(x)+x$ 이고

㉠에 대입하면

$A(x)=\{C(x)+x\}\{C(x)+2x\}+C(x)+x-x^2$

$\quad=C(x)\{C(x)+3x+1\}+x^2+x$

$A(x)$ 는 $C(x)=B(x)-x$ 로 나누어떨어지므로

x^2+x 도 $B(x)-x$ 로 나누어떨어진다. $B(x)-x$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로

$B(x)-x=x^2+x$ 이다.

$B(x)=x^2+2x$ 이고 $B(2)=8$

따라서 $A(2)=B(2)\{B(2)+2\}+B(2)-4=84$

30. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계 추론하기

직선 $y=x+k$가 이차함수 $y=x^2-5x$ 의 그래프에 접할 때, 방정식 $x^2-5x=x+k$가 중근을 가진다.

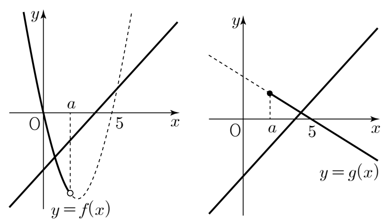
$x^2-6x-k=0$ 의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-(-k)=0$, $k=-9$

직선 $y=x-9$ 는 이차함수 $y=x^2-5x$ 의 그래프와 점 $(3,\ -6)$ 에서 접한다.

(ⅰ) $a\le 3$ 인 경우

$m\le 1$, $n\le 1$ 이므로 $m+n\le 2$



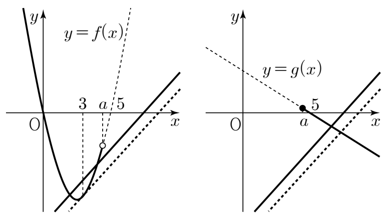
(ⅱ) $3<a\le 5$ 인 경우

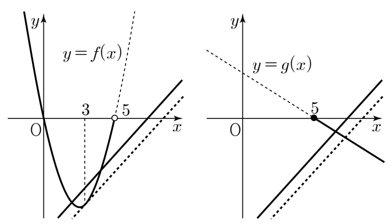
직선 $y=x+k$가 $(a,\ a^2-5a)$ 를 지날 때

$k=a^2-6a$

$-9<k<a^2-6a$ 에서 $m=2$, $n=1$

따라서 $m+n=3$





(ⅲ) $a>5$ 인 경우

두 직선 $y=x-9$ 와 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 의 교점의

좌표는 $\left(\frac{23}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$ 이므로

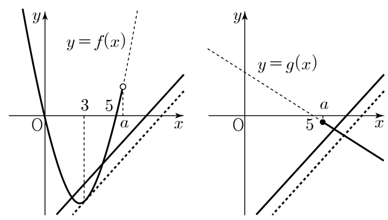
$-9<k<a^2-6a$ 인 k에 대하여

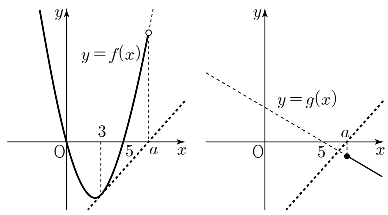
$a<\frac{23}{3}$ 이면 $m=2$, $n=1$ 이므로 $m+n=3$

$a\ge\frac{23}{3}$ 이면

$m+n=3$ 이 되는 k가 존재하지 않는다.

따라서 $5<a<\frac{23}{3}$ 에서 $m+n=3$ 인 실수 k가 존재한다.





(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여

모든 a의 값의 범위는 $3<a<\frac{23}{3}$ 이다.

따라서 $p\times q=23$