2026학년도 6월
전국연합학력평가

정답 및 해설

고 2

• 수학 영역 •

정 답

1	③	2	②	3	④	4	⑤	5	③
6	②	7	⑤	8	④	9	①	10	②
11	①	12	⑤	13	①	14	②	15	③
16	④	17	⑤	18	①	19	④	20	②
21	①	22	49	23	4	24	15	25	81
26	12	27	6	28	48	29	210	30	224

해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$2^{2-\sqrt{2}} \times 2^{\sqrt{2}} = 2^{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}} = 2^2 = 4$

2. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_3 \frac{3}{2} + \log_3 6 = \log_3 \left(\frac{3}{2} \times 6\right)$

$= \log_3 3^2 = 2$

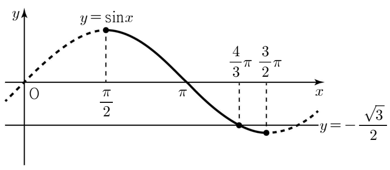
3. [출제의도] 부채꼴의 넓이 계산하기

반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ, 부채꼴의 넓이를 S라 하면 $S = \frac{1}{2}r^2\theta$이므로

$S = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{2}{3}\pi = \frac{16}{3}\pi$이다.

4. [출제의도] 삼각함수가 포함된 방정식 이해하기

$\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3}{2}\pi$에서 방정식 $2\sin x + \sqrt{3} = 0$의 해는 곡선 $y = \sin x$와 직선 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$이 만나는 점의 x좌표이다. 따라서 $x = \frac{4}{3}\pi$이다.



5. [출제의도] 상용로그의 성질 이해하기

수	⋯	3	4	5	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.2	⋯	.3483	.3502	.3522	⋯
2.3	⋯	.3674	.3692	.3711	⋯
2.4	⋯	.3856	.3874	.3892	⋯

$\log 24.5 = \log(2.45 \times 10) = \log 2.45 + 1$
이고 상용로그표에서 $\log 2.45 = 0.3892$이므로
$\log 24.5 = 0.3892 + 1 = 1.3892$이다.

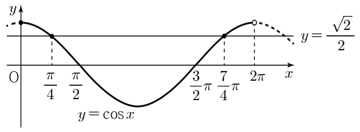
6. [출제의도] 로그함수의 최댓값과 최솟값 이해하기

함수 $f(x) = \log_2(x-3)+5$는 x의 값이 증가할 때 y의 값이 증가하므로 $4 \le x \le 11$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(11)$, 최솟값은 $f(4)$이다.
$f(11) = \log_2(11-3)+5 = 8$이고,
$f(4) = \log_2(4-3)+5 = 5$이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 13이다.

7. [출제의도] 지수함수가 포함된 부등식 이해하기

$2^{13-2x} \ge 2^3$이고 밑이 1보다 크므로 $13-2x \ge 3$이다. 따라서 $x \le 5$이므로 자연수 x의 개수는 5이다.

8. [출제의도] 삼각함수가 포함된 부등식 이해하기



부등식 $2\cos x - \sqrt{2} \le 0$에서 $\cos x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

이고, $0 \le x < 2\pi$에서 곡선 $y = \cos x$와 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$가 만나는 두 점의 x좌표가 각각 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7}{4}\pi$이므로 부등식 $\cos x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{7}{4}\pi$이다.

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{7}{4}\pi$ 이므로

$\beta - \alpha = \frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi$이다.

9. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

곡선 $y = 2^x - 3$의 점근선은 $y = -3$이므로 점 (a, b)와 곡선 $y = 2^x - 3$의 점근선 사이의 거리는 $b+3$이다. $b+3 = 7$이므로 $b = 4$이다. 점 $(a, 4)$가 곡선 $y = 2^x$ 위의 점이므로 $2^a = 4$이고 $a = 2$이다.
따라서 $a + b = 2 + 4 = 6$이다.

10. [출제의도] 로그함수의 역함수 이해하기

함수 $y = \log_5 x + 2$의 역함수의 그래프가 점 $(4, 5^k)$을 지나므로 함수 $y = \log_5 x + 2$의 그래프는 점 $(5^k, 4)$를 지난다.
따라서 $\log_5 5^k + 2 = 4$이고 $k + 2 = 4$이므로 $k = 2$이다.

11. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 자연수의 합 구하는 문제 해결하기

곡선 $y = 2\log_2 x$와 직선 $x = k$가 만나는 점 A의 좌표는 $(k, 2\log_2 k)$이고, 곡선 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$와 직선 $x = k$가 만나는 점 B의 좌표는 $(k, -\log_2 k)$이다.
$3 \le \overline{AB} \le 6$
$3 \le 2\log_2 k - (-\log_2 k) \le 6$
$3 \le 3\log_2 k \le 6$
$1 \le \log_2 k \le 2$
$2 \le k \le 4$
이다.
따라서 모든 자연수 k의 값의 합은
$2 + 3 + 4 = 9$이다.

12. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계 이해하기

$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta = -\frac{1}{3}$이므로 $\sin\theta = \frac{1}{3}$이고,

$1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$이므로

$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$= \frac{\sin\theta(1+\cos\theta) + \sin\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

$= \frac{2\sin\theta}{1-\cos^2\theta}$

$= \frac{2}{\sin\theta}$

$= 6$

이다.

13. [출제의도] 사인법칙 이해하기

$\cos(B+C) = \cos(\pi - A) = -\cos A$이므로
조건 (나)에서

$\cos(B+C) = \cos A + \frac{1}{2}$

$-\cos A = \cos A + \frac{1}{2}$

$\cos A = -\frac{1}{4}$

이다. $0 < A < \pi$이므로 $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$이고, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 조건 (가)에서 $\overline{BC} = 3$이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2R$

$3 \times \frac{4}{\sqrt{15}} = 2R$

$R = \frac{2}{5}\sqrt{15}$

이다. 따라서 외접원의 넓이는

$\pi \times \left(\frac{2}{5}\sqrt{15}\right)^2 = \frac{12}{5}\pi$

이다.

14. [출제의도] 지수법칙을 활용하여 식의 값 추론하기

$\left(\frac{4^a \times 6}{3^b}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^{2a+1} \times 3^{1-b}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{2a+1}{3}} \times 3^{\frac{1-b}{3}}$

의 값이 10 이상 20 이하의 자연수이므로
$2^{\frac{2a+1}{3}} \times 3^{\frac{1-b}{3}}$의 값은 $2^2 \times 3$ 또는 2^4 또는 2×3^2이다.

(i) $2^{\frac{2a+1}{3}} \times 3^{\frac{1-b}{3}} = 2^2 \times 3$인 경우
$\frac{2a+1}{3} = 2$, $\frac{1-b}{3} = 1$이므로 $a = \frac{5}{2}$, $b = -2$이다.
a는 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $2^{\frac{2a+1}{3}} \times 3^{\frac{1-b}{3}} = 2^4$인 경우
$\frac{2a+1}{3} = 4$, $\frac{1-b}{3} = 0$이므로 $a = \frac{11}{2}$, $b = 1$이다.
a는 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $2^{\frac{2a+1}{3}} \times 3^{\frac{1-b}{3}} = 2 \times 3^2$인 경우
$\frac{2a+1}{3} = 1$, $\frac{1-b}{3} = 2$이므로 $a = 1$, $b = -5$이다.
따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여
$a + b = 1 + (-5) = -4$이다.

15. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 이차방정식 문제 해결하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\log_2\alpha + \log_2\beta = \log_2 k + 10$
$\log_2\alpha \times \log_2\beta = 5$
이다.

$\log_\alpha 2 + \log_\beta 2 = \frac{1}{\log_2\alpha} + \frac{1}{\log_2\beta}$

$= \frac{\log_2\alpha + \log_2\beta}{\log_2\alpha \times \log_2\beta}$

$= \frac{\log_2 k + 10}{5}$

이고, 주어진 조건에 의하여

$\frac{\log_2 k + 10}{5} = 3$이므로 $\log_2 k = 5$이다.

따라서 $k = 2^5 = 32$이다.

16. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 도형의 넓이 문제 해결하기

함수 $y=2\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{4}$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$ 이다.

점 A의 x좌표를 $t\,(0<t<2)$라 하면,
세 점 B, C, D의 x좌표는 각각 $4-t$, $4+t$, $8-t$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=4-2t$ 이므로 사각형 ACDB는 평행사변형이다.
두 점 A, C의 좌표가 $\mathrm{A}(t,\ k)$, $\mathrm{C}(4+t,\ -k)$ 이고 직선 AC의 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 이므로

$$\frac{-k-k}{(4+t)-t}=-\frac{3}{2}$$

$$k=3$$

이다. $\mathrm{A}(t,\ 3)$ 이므로

$$f(t)=2\sqrt{3}\sin\frac{\pi t}{4}=3$$

$$\sin\frac{\pi t}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \left(0<\frac{\pi t}{4}<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\pi t}{4}=\frac{\pi}{3}$$

$$t=\frac{4}{3}$$

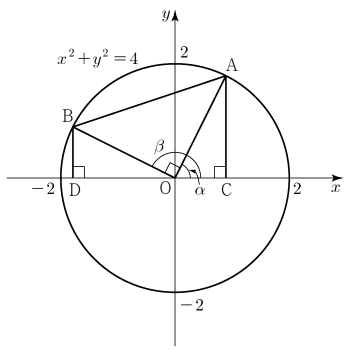
이다.
따라서 사각형 ACDB의 넓이는

$$\overline{\mathrm{AB}}\times 2k=(4-2t)\times 6=\left(4-2\times\frac{4}{3}\right)\times 6=8$$

이다.

17. [출제의도] 삼각함수의 정의를 이용하여 도형의 넓이 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$ 이고 원의 반지름의 길이가 2이므로 삼각형 OAB는 직각삼각형이다.
그러므로 $\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$ 이고, $\beta<\pi$ 이므로
$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 이다.



$\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ 이므로

$\cos\alpha\times\sin\beta=\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$ 이고

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 이다.

그러므로 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 이고

$\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 이다.

두 점 A, B의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$라 하면

$\cos\alpha=\frac{x_1}{2}$ 에서 $x_1=2\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 이고

$\sin\alpha=\frac{y_1}{2}$ 에서 $y_1=2\sin\alpha=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.

$\cos\beta=\frac{x_2}{2}$ 에서 $x_2=2\cos\beta=-\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이고

$\sin\beta=\frac{y_2}{2}$ 에서 $y_2=2\sin\beta=2\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 이다.

그러므로 네 점 A, B, C, D의 좌표는

$\mathrm{A}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$, $\mathrm{B}\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5},\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$,

$\mathrm{C}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\ 0\right)$, $\mathrm{D}\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5},\ 0\right)$ 이다.

따라서 사각형 ABDC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}})\times\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}\times\frac{6\sqrt{5}}{5}\times\frac{6\sqrt{5}}{5}=\frac{18}{5}$$

이다.

18. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 선분의 길이 추론하기

원의 성질에 의하여
$\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{QAB}$, $\angle\mathrm{BPQ}=\angle\mathrm{QBA}$ 이므로
$\angle\mathrm{APB}=\theta_1+\theta_2$이다. $\angle\mathrm{AQB}=\pi-(\theta_1+\theta_2)$ 이고

$\angle\mathrm{APB}<\angle\mathrm{AQB}$ 이므로 $\theta_1+\theta_2<\frac{\pi}{2}$ 이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=2$이고 삼각형 PAB의 외접원의 반지름의 길이가 $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ 이므로 삼각형 PAB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}=\frac{6\sqrt{3}}{5}$$

$$\sin(\theta_1+\theta_2)=\boxed{\frac{5\sqrt{3}}{9}}$$

이다. $\sin\theta_1:\sin\theta_2=\sqrt{3}:\sqrt{2}$ 이므로
삼각형 QAB에서 사인법칙에 의하여
$\sin\theta_1:\sin\theta_2=\overline{\mathrm{QB}}:\overline{\mathrm{QA}}=\sqrt{3}:\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{QB}}=\boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}}\times\overline{\mathrm{QA}}$$

이다.
$\angle\mathrm{AQB}=\pi-(\theta_1+\theta_2)$ 이므로

$$\begin{aligned}\cos(\angle\mathrm{AQB})&=\cos(\pi-(\theta_1+\theta_2))\\&=-\cos(\theta_1+\theta_2)\\&=-\sqrt{1-\sin^2(\theta_1+\theta_2)}\\&=-\frac{\sqrt{6}}{9}\end{aligned}$$

이고, $\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로 삼각형 QAB에서 코사인법칙에 의하여

$$2^2=\overline{\mathrm{QA}}^2+\overline{\mathrm{QB}}^2-2\times\overline{\mathrm{QA}}\times\overline{\mathrm{QB}}\times\cos(\angle\mathrm{AQB})$$

$$4=\overline{\mathrm{QA}}^2+\frac{3}{2}\overline{\mathrm{QA}}^2-2\times\overline{\mathrm{QA}}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\overline{\mathrm{QA}}\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{9}\right)$$

$$\overline{\mathrm{QA}}^2=\frac{24}{19}$$

$$\overline{\mathrm{QA}}=\boxed{\sqrt{\frac{24}{19}}}$$

이므로

$p=\frac{5\sqrt{3}}{9}$, $q=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $r=\sqrt{\frac{24}{19}}$ 이다.

따라서

$$p\times q\times r^2=\frac{5\sqrt{3}}{9}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\left(\sqrt{\frac{24}{19}}\right)^2=\frac{20\sqrt{2}}{19}$$

이다.

19. [출제의도] 거듭제곱근의 정의를 이용하여 자연수의 합 추론하기

$20<\sqrt{401}<21$ 이므로
$2\le n\le 20$ 일 때, $n-\sqrt{401}<0$ 이고,
$21\le n\le 50$ 일 때, $n-\sqrt{401}>0$ 이다.

$\log_2\frac{15}{n\times(f(n)+3)}$ 의 값이 정수이므로

$\log_2\frac{15}{n\times(f(n)+3)}=k$ (k는 정수)라 하자.

(i) n이 홀수인 경우
$n-\sqrt{401}$ 의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이므로 $f(n)=1$이다.

$$\log_2\frac{15}{n\times(f(n)+3)}=\log_2\frac{15}{4n}=k$$

에서 $n=15\times2^{-k-2}$이고 n이 홀수이므로
$k=-2$일 때, $n=15$이다.

(ii) n이 $2\le n\le 20$인 짝수인 경우
$n-\sqrt{401}<0$이므로 $n-\sqrt{401}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이다.
그러므로 $f(n)=0$이다.

$$\log_2\frac{15}{n\times(f(n)+3)}=\log_2\frac{5}{n}=k$$

에서 $n=5\times2^{-k}$이고 $2\le n\le 20$이므로
$k=-1$일 때, $n=5\times2=10$
$k=-2$일 때, $n=5\times2^2=20$
이다.

(iii) n이 $22\le n\le 50$인 짝수인 경우
$n-\sqrt{401}>0$이므로 $n-\sqrt{401}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.
그러므로 $f(n)=2$이다.

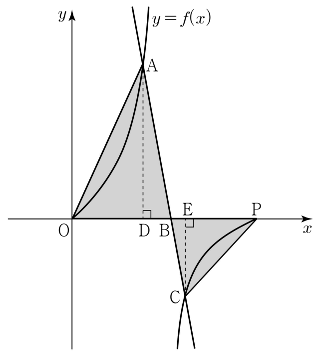
$$\log_2\frac{15}{n\times(f(n)+3)}=\log_2\frac{3}{n}=k$$

에서 $n=3\times2^{-k}$이고 $22\le n\le 50$이므로
$k=-3$일 때, $n=3\times2^3=24$
$k=-4$일 때, $n=3\times2^4=48$
이다.
따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 모든 n의 값의 합은 $15+10+20+24+48=117$이다.

20. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 도형 문제 해결하기

함수 $f(x)=\begin{cases}4\tan\frac{x}{4} & (0\le x<2\pi)\\ 2\tan\frac{x}{4} & (2\pi<x\le 4\pi)\end{cases}$

이다.



점 A의 좌표는 $\left(a,\ 4\tan\frac{a}{4}\right)$이고, 조건 (가)에 의하여 점 C의 좌표는 $\left(4\pi-a,\ 2\tan\frac{4\pi-a}{4}\right)$이다.

$$2\tan\frac{4\pi-a}{4}=2\tan\left(\pi-\frac{a}{4}\right)=2\tan\left(-\frac{a}{4}\right)=-2\tan\frac{a}{4}$$

이고
삼각형 AOB와 삼각형 BCP의 넓이의 비가 $7:3$이므로

$$\frac{1}{2}\times b\times4\tan\frac{a}{4}:\frac{1}{2}\times(4\pi-b)\times2\tan\frac{a}{4}=7:3$$

$$2b:(4\pi-b)=7:3$$

$$7(4\pi-b)=6b$$

$b=\dfrac{28}{13}\pi$

이다. 두 점 A, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{CE}}=4\tan\dfrac{a}{4}:2\tan\dfrac{a}{4}=2:1$이고,

삼각형 ADB와 삼각형 CEB는 닮음이므로

$\overline{\mathrm{DB}}:\overline{\mathrm{EB}}=2:1$이다. 그러므로

$\left(\dfrac{28}{13}\pi-a\right):\left\{(4\pi-a)-\dfrac{28}{13}\pi\right\}=2:1$

$2\left(\dfrac{24}{13}\pi-a\right)=\dfrac{28}{13}\pi-a$

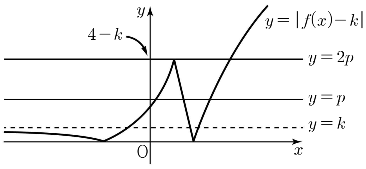
$a=\dfrac{20}{13}\pi$

이다.

따라서 $a+b=\dfrac{20}{13}\pi+\dfrac{28}{13}\pi=\dfrac{48}{13}\pi$이다.

21. [출제의도] 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 활용하여 식의 값 구하는 문제 해결하기

(i) $0<k<2$인 경우



함수 $y=|f(x)-k|$의 그래프가 직선 $y=2p$와 만나는 점의 개수가 2이므로

$2p=4-k$ ……㉠

이다. 함수 $y=|f(x)-k|$의 그래프가 직선 $y=p$와 만나는 점의 개수가 3이므로

$p\ge k$ ……㉡

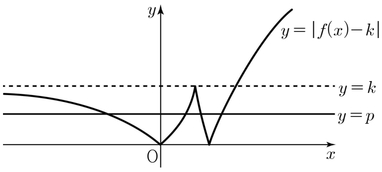
이다. ㉠, ㉡에 의하여 조건을 만족시키는 양수 k의 값의 범위는

$2p=4-k\ge 2k$

$k\le\dfrac{4}{3}$

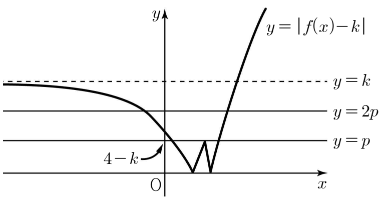
이다. 그러므로 $0<k\le\dfrac{4}{3}$이다.

(ii) $k=2$인 경우



함수 $y=|f(x)-k|$의 그래프와 직선 $y=p$가 만나는 점의 개수가 3이 되도록 하는 양수 p가 존재하지 않는다.

(iii) $2<k<4$인 경우



함수 $y=|f(x)-k|$의 그래프가 직선 $y=p$와 만나는 점의 개수가 3이므로

$p=4-k$ ……㉠

이다. 함수 $y=|f(x)-k|$의 그래프가 직선 $y=2p$와 만나는 점의 개수가 2이므로

$2p<k$ ……㉡

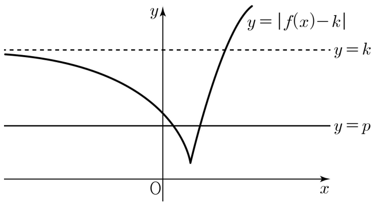
이다. ㉠, ㉡에 의하여 조건을 만족시키는 양수 k의 값의 범위는

$8-2k<k$

$k>\dfrac{8}{3}$

이다. 그러므로 $\dfrac{8}{3}<k<4$이다.

(iv) $k\ge 4$인 경우



함수 $y=|f(x)-k|$의 그래프와 직선 $y=p$가 만나는 점의 개수가 3이 되도록 하는 양수 p가 존재하지 않는다.

그러므로 (i)~(iv)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 양수 k의 값의 집합은

$\left\{k \,\middle|\, 0<k\le\dfrac{4}{3}\ \text{ 또는 }\ \dfrac{8}{3}<k<4\right\}$

이다.

따라서 $\alpha=\dfrac{4}{3}$, $\beta=\dfrac{8}{3}$, $\gamma=4$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=8$이다.

22. [출제의도] 거듭제곱근 계산하기

$$\sqrt[3]{49}\times\sqrt[3]{7^4}=\sqrt[3]{49\times7^4}=\sqrt[3]{7^2\times7^4}=\sqrt[3]{7^6}=7^2=49$$

23. [출제의도] 지수함수가 포함된 방정식 계산하기

$5^{x+4}=25^{2x-4}$

$5^{x+4}=(5^2)^{2x-4}$

$5^{x+4}=5^{4x-8}$

에서 $x+4=4x-8$이다.

따라서 $3x=12$이므로 $x=4$이다.

24. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 식의 값 계산하기

$$\frac{10\times\sin\frac{2}{3}\pi}{\tan\frac{7}{6}\pi}=\frac{10\times\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}{\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{10\times\sin\frac{\pi}{3}}{\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=15$$

25. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$$\log_3 2\times\log_4 a=\log_3 2\times\frac{\log_3 a}{\log_3 4}=\log_3 2\times\frac{\log_3 a}{2\log_3 2}=\frac{\log_3 a}{2}=2$$

이므로 $\log_3 a=4$이다.

따라서 $a=3^4=81$이다.

26. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)=a\cos bx+10-a$의 주기가 3π이므로

$\dfrac{2\pi}{b}=3\pi$, $b=\dfrac{2}{3}$이다.

(i) $a>0$인 경우

함수 $f(x)$의 최댓값은 $a+10-a=10$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$인 경우

함수 $f(x)$의 최댓값은

$-a+10-a=-2a+10=18$이므로 $a=-4$이다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여

$f(x)=-4\cos\dfrac{2}{3}x+14$이다.

따라서 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-4\cos\left(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\pi}{2}\right)+14=12$이다.

27. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 최솟값 추론하기

곡선 $y=\log_2 x$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 곡선은 곡선 $y=\log_2(x-a)$와 일치하므로 $\overline{\mathrm{BC}}=a$이다.

점 A의 x좌표를 $t\,(t>a)$라 하면

두 점 A, B의 좌표는 각각 $(t, \log_2(t-a))$, $(t, \log_2 t)$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$\log_2 t-\log_2(t-a)=a$

$\log_2\dfrac{t}{t-a}=a$

$\dfrac{t}{t-a}=2^a$

$t=\dfrac{a\times2^a}{2^a-1}$

이다. 그러므로 $f(a)=\dfrac{a\times2^a}{2^a-1}$이고, $\dfrac{f(a)}{a}=\dfrac{2^a}{2^a-1}$

이므로

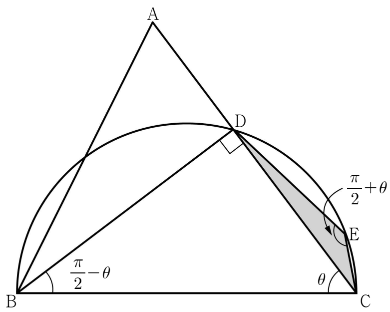
$\dfrac{f(a)}{a}\le\dfrac{64}{63}$

$\dfrac{2^a}{2^a-1}\le\dfrac{64}{63}$

$2^a\ge2^6$

이다. 따라서 $a\ge6$이므로 a의 최솟값은 6이다.

28. [출제의도] 코사인법칙을 활용하여 도형 문제 해결하기



$\angle\mathrm{ACB}=\theta$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\cos(\angle\mathrm{ACB})=\dfrac{5^2+5^2-(2\sqrt{5})^2}{2\times5\times5}=\dfrac{3}{5}$

이다. $\angle\mathrm{BDC}=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=5\times\cos\theta=5\times\dfrac{3}{5}=3$, $\angle\mathrm{DBC}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이고

원에 내접하는 사각형의 성질에 의하여

$\angle\mathrm{DEC}=\dfrac{\pi}{2}+\theta$이다.

삼각형 DCE의 넓이가 $\dfrac{3}{5}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DE}}\times\overline{\mathrm{CE}}\times\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\dfrac{3}{5}$

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DE}}\times k\times\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

$\overline{\mathrm{DE}}=\frac{2}{k}$

이다. 삼각형 DCE에서 코사인법칙에 의하여

$9=k^2+\frac{4}{k^2}-2\times k\times\frac{2}{k}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$9=k^2+\frac{4}{k^2}+2\times k\times\frac{2}{k}\times\sin\theta$ 이고

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{4}{5}$ 이므로

$\frac{20}{k^2}+5k^2-29=0$

$\overline{\mathrm{CE}}<\overline{\mathrm{DE}}$ 이므로 $k<\frac{2}{k}$ 이고 $k^2<2$ 이다.

$k^2=X\,(X<2)$라 하면

$\frac{20}{X}+5X-29=0$

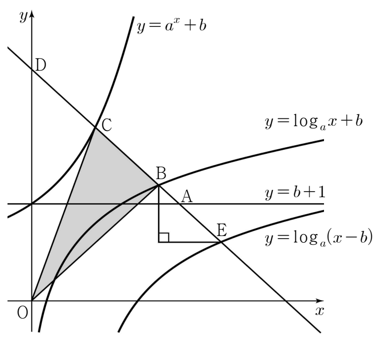
$5X^2-29X+20=0$

$(5X-4)(X-5)=0$

$X=\frac{4}{5}$ 이다.

따라서 $k^2=\frac{4}{5}$ 이므로 $60k^2=60\times\frac{4}{5}=48$이다.

29. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 역함수 관계를 이용하여 식의 값 구하는 문제 해결하기



곡선 $y=a^x+b$와 y축이 만나는 점이 $(0,\ b+1)$이므로 직선 l의 방정식은 $y=b+1$이다.
함수 $y=a^x+b$의 역함수 $y=\log_a(x-b)$에 대하여 직선 AB가 곡선 $y=\log_a(x-b)$와 만나는 점을 E라 하자.
점 C의 x좌표를 k라 하면
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{CD}}=1:3:3$이므로
두 점 B, A의 x좌표는 각각 $2k,\ \frac{7}{3}k$이다.
점 $\mathrm{C}(k,\ a^k+b)$이고 역함수 성질에 의해
점 $\mathrm{E}(a^k+b,\ k)$이다.
함수 $y=\log_a x+b$의 그래프는
함수 $y=\log_a(x-b)$의 그래프를
x축의 방향으로 $-b$만큼 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프이므로 점 $\mathrm{B}(a^k,\ b+k)$이다.
그러므로

$a^k=2k$ …… ㉠

이다. 두 점 $\mathrm{A}\left(\frac{7}{3}k,\ b+1\right)$, $\mathrm{B}(2k,\ b+k)$를 지나는 직선의 기울기가 -1이므로

$\frac{(b+k)-(b+1)}{2k-\frac{7}{3}k}=-1$

$(b+k)-(b+1)=\frac{7}{3}k-2k$

$k-1=\frac{k}{3}$

$k=\frac{3}{2}$ 이다. ㉠에서 $a^{\frac{3}{2}}=3$이고 $a^3=9$이다.

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2}\,k=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 이고 원점 O에서 직선 AB까지의 거리를 d라 하면 삼각형 OBC의 넓이는 $\frac{9}{2}$ 이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{2}\times d=\frac{9}{2}$

$d=3\sqrt{2}$ 이다. 그러므로 $\overline{\mathrm{OD}}=6$이고,
직선 AB의 방정식은 $y=-x+6$이다.
점 A는 직선 $y=-x+6$과 직선 $y=b+1$이 만나는 점이고, 점 A의 x좌표가

$\frac{7}{3}k=\frac{7}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$ 이므로

$-\frac{7}{2}+6=b+1$

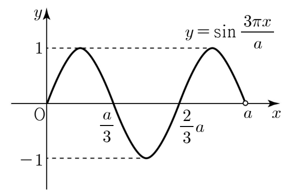
$b=\frac{3}{2}$ 이다.

따라서 $20(a^3+b)=210$이다.

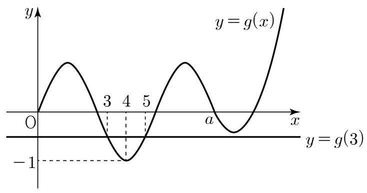
30. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 함숫값 구하는 문제 해결하기

함수 $y=\sin\frac{3\pi x}{a}$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{a}}=\frac{2}{3}a$이므로

$0\le x<a$에서 함수 $y=\sin\frac{3\pi x}{a}$ 의 그래프는 다음과 같다.



조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 최솟값을 가지므로 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이다.
(ⅰ) $x\ge a$에서 함수 $f(x)-f(a)$의 최솟값이 -1보다 큰 경우
$a>4$이고 그림과 같이 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 최솟값 -1을 갖는다.



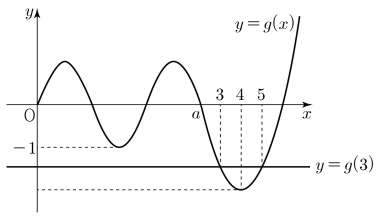
$g(4)=\sin\left(\frac{3\pi}{a}\times4\right)=-1$에서 $\frac{12}{a}\pi=\frac{3}{2}\pi$이므로

$a=8$이다.

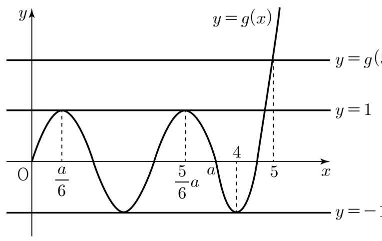
$g(3)=\sin\frac{9}{8}\pi=-\sin\frac{\pi}{8}$

$g(5)=\sin\frac{15}{8}\pi=-\sin\frac{\pi}{8}$

에서 $g(3)=g(5)$이고 $h(3)=h(5)$이므로
조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $x\ge a$에서 함수 $f(x)-f(a)$의 최솟값이 -1보다 작은 경우
$a<4$이고 그림과 같이 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 최솟값을 갖고, $h(4)=1$이다.



이차함수 $f(x)-f(a)$의 그래프가 $x=4$에 대하여 대칭이므로 $h(n)=2$를 만족시키는 자연수 n의 개수는 1이 아니다. 그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(ⅲ) $x\ge a$에서 $f(x)-f(a)$의 최솟값이 -1인 경우
(ⅰ)과 같은 방법에 의하여 $a>4$는 조건을 만족시키지 않으므로 $a<4$이다.
그러므로 이차함수 $f(x)-f(a)$는 $x=4$에서 최솟값 -1을 갖고, $h(4)=2$이다.
그림과 같이 $h(n)=1$을 만족시키는 자연수 n의 개수는 1이고 $n>4$이므로 $h(5)=1$이다.



$h(n)=3$을 만족시키는 자연수 n에 대하여

$g(n)=1$이므로 $n=\frac{a}{6}$ 또는 $n=\frac{5}{6}a$이다.

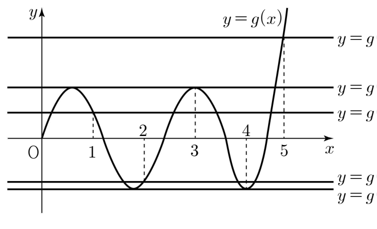
$a<4$에서 $\frac{a}{6}<\frac{2}{3}$이므로 $\frac{a}{6}$는 자연수가 아니다.

그러므로 $n=\frac{5}{6}a$이다.

① $\frac{5}{6}a=1$이면 $a=\frac{6}{5}$이고 $h(2)=h(3)=4$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

② $\frac{5}{6}a=2$이면 $a=\frac{12}{5}$이고 $h(1)=h(3)=4$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

③ $\frac{5}{6}a=3$이면 $a=\frac{18}{5}$이고 $h(1)=5$, $h(2)=4$이므로 그림과 같이 조건 (나)를 만족시킨다.



이차함수 $f(x)-f(a)$는 $x=4$에서 최솟값 -1을 가지므로 $f(x)-f(a)=b(x-4)^2-1$이고,

점 $\left(\frac{18}{5},\ 0\right)$을 지나므로 $b\left(\frac{18}{5}-4\right)^2-1=0$

$b=\frac{25}{4}$

이다. $x\ge\frac{18}{5}$ 일 때, $g(x)=\frac{25}{4}(x-4)^2-1$이다.

따라서 $g(10)=\frac{25}{4}(10-4)^2-1=224$이다.

[참고]

함수 $g(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{5\pi x}{6} & \left(0 \le x < \dfrac{18}{5}\right) \\ \dfrac{25}{4}(x-4)^2-1 & \left(x \ge \dfrac{18}{5}\right) \end{cases}$

에 대하여

$g(1)=\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{1}{2}$ 이고 $h(1)=5$,

$g(2)=\sin\left(\dfrac{5}{3}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이고 $h(2)=4$,

$g(3)=\sin\left(\dfrac{5}{2}\pi\right)=1$ 이고 $h(3)=3$,

$g(4)=-1$ 이고 $h(4)=2$,

$g(5)=\dfrac{25}{4}(5-4)^2-1=\dfrac{21}{4}>1$ 이고 $h(5)=1$

이다.